

Systemes interconnectés avec retards : une analyse dans le domaine fréquentiel

Catherine Bonnet ¹

joint work with

Le Ha Vy Nguyen¹ André Ricardo Fioravanti²

¹Inria Saclay - Île-de-France, DISCO Team, L2S-SUPELEC, France

²DSCE / School of Electrical and Computer Engineering, UNICAMP, Campinas, SP, Brazil

Groupe de Travail Shy 13 mars 2014

L'analyse et la commande de systèmes dynamiques complexes



Systemes linéaires à retards

Plan de l'exposé

- Cadre d'étude et outils

Plan de l'exposé

- Cadre d'étude et outils
- Stabilité et stabilisation des systèmes à retards

Plan de l'exposé

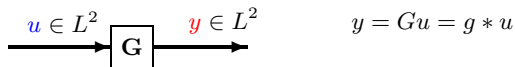
- Cadre d'étude et outils
- Stabilité et stabilisation des systèmes à retards
- Boîte à outils Matlab YALTA

Une approche entrée-sortie pour la commande

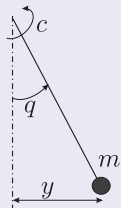


$$y = Gu = g * u$$

Une approche entrée-sortie pour la commande



Exemple le plus simple :
le pendule

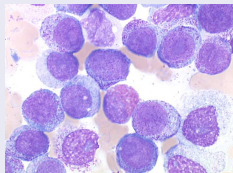


Un système mécanique

entrée u : couple appliqué
sortie y : distance de m à l'axe

Exemple de système

Leucémie aiguë myéloblastique



Un système vivant

u : médicament

y : densité de populations de cellules
(globules blancs)

Temporel ou fréquentiel ?

Domaine temporel (description espace d'état)

Systèmes mécaniques, biologiques, économiques . . .

Temporel ou fréquentiel ?

Domaine temporel (description espace d'état)

Systèmes mécaniques, biologiques, économiques ...

- Equations Différentielles Ordinaires
- $$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= 0\end{aligned}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Domaine fréquentiel (description entrée-sortie)

- $\hat{y}(s) = \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g * u) = \boxed{G(s)} \hat{u}(s) = \boxed{C(sI - A)^{-1}B} \hat{u}(s)$

Temporel ou fréquentiel ?

Domaine temporel (description espace d'état)

Systèmes mécaniques, biologiques, économiques ...

- Equations Différentielles Ordinaires
 - Equations aux dérivées partielles
- $$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= 0\end{aligned}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Domaine fréquentiel (description entrée-sortie)

- $\hat{y}(s) = \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g * u) = \boxed{G(s)} \hat{u}(s) = \boxed{C(sI - A)^{-1}B} \hat{u}(s)$
- Possible mais moins systématique

Temporel ou fréquentiel ?

Domaine temporel (description espace d'état)

Systèmes mécaniques, biologiques, économiques ...

- Equations Différentielles Ordinaires
 - Equations aux dérivées partielles
- $$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \\ x(0) &= 0\end{aligned}$$

$\xrightarrow{\mathcal{L}}$

Domaine fréquentiel (description entrée-sortie)

- $\hat{y}(s) = \mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(g * u) = \boxed{G(s)} \hat{u}(s) = \boxed{C(sI - A)^{-1}B} \hat{u}(s)$
- Possible mais moins systématique
- Parfois, on ne dispose que d'expérimentations fréquentielles à partir desquelles on identifie une fonction de transfert $G(s)$.

La stabilité dans le domaine entrée-sortie

Stabilité

$$\sup_{u \in L^2, u \neq 0} \frac{\|Gu\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}} = \|G\|_{H_\infty} < \infty$$

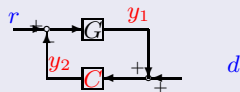
$H_\infty = \{\text{fonctions qui sont analytiques et bornées dans } \{\operatorname{Re} s > 0\}\}$.

La stabilité dans le domaine entrée-sortie

Stabilité

$$\sup_{u \in L^2, u \neq 0} \frac{\|Gu\|_{L^2}}{\|u\|_{L^2}} = \|G\|_{H_\infty} < \infty$$

$H_\infty = \{\text{fonctions qui sont analytiques et bornées dans } \{\text{Re } s > 0\}\}$.



r : signal de référence

d : signal de perturbation

$$y_1 = G(1 - GC)^{-1}r + GC(1 - GC)^{-1}d$$

$$y_2 = G(1 - GC)^{-1}r + C(1 - GC)^{-1}d$$

Trouver un contrôleur C qui assure **stabilité** et (la meilleure) **précision**

Contrôle robuste en dimension finie

Idée de Vydiasagar en 1985 (transferts rationnels)

G instable s'écrit $G = \frac{N}{D}$ où N, D sont stables

et il existe X, Y tel que $-NX + DY = 1$

Ici G, N, D, X, Y sont des fonctions de transfert **rationnelles**

Contrôle robuste en dimension finie

Idée de Vydiasagar en 1985 (transferts rationnels)

G instable s'écrit $G = \frac{N}{D}$ où N, D sont stables

et il existe X, Y tel que $-NX + DY = 1$

Ici G, N, D, X, Y sont des fonctions de transfert **rationnelles**

Paramétrisation de Youla-Kučera

En paramétrant l'ensemble des contrôleurs

$$C = \frac{X + DQ}{Y + NQ}, \quad -NX + DY = 1 \quad Q \in H_\infty \quad (\text{paramètre libre})$$

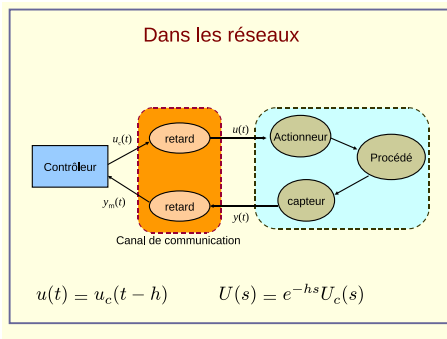
Optimisation de la précision : problème d'optimisation sans contrainte

Ces contrôleurs sont robustes (stabilisent aussi $\tilde{G} = (N + \tilde{N})/(D + \tilde{D})$)

Succès du contrôle H_∞ (Ariane 5, SAGEM)

Quand les retards apparaissent...

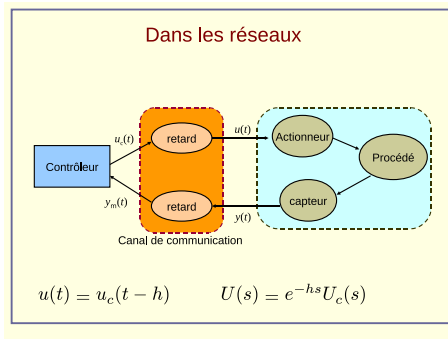
De façon incongrue dans les boucles de contrôle



- Interconnexions : opérations chirurgicales à distance, smart grids

Quand les retards apparaissent...

De façon incongrue dans les boucles de contrôle



- Interconnexions : opérations chirurgicales à distance, smart grids

Naturellement dans la modélisation

- Trafic autour des grandes villes (temps de réaction), différentes phases du cycle cellulaire

Quand le retard déstabilise

- $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$

$$\frac{1}{s+1}$$

stable

Les effets du retard

Quand le retard déstabilise

• $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ $\frac{1}{s+1}$ stable

• $\dot{x}(t) = -x(t - \tau) + u(t)$ $\frac{1}{s + e^{-s\tau}}$ instable pour $\tau > \frac{\pi}{2}$

Les effets du retard

Quand le retard déstabilise

- $\dot{x}(t) = -x(t) + u(t)$ $\frac{1}{s+1}$ stable

- $\dot{x}(t) = -x(t - \tau) + u(t)$ $\frac{1}{s + e^{-s\tau}}$ instable pour $\tau > \frac{\pi}{2}$

... parfois un retard plus grand restabilise

Systèmes à retards

$$\mathcal{G}_r : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= C_0x(t) + C_1x(t - \tau) + Du(t) \end{cases}$$

avec $x(t) = 0$ pour tout $t \in [-\tau, 0]$

$$G_r(s) = (C_0 + C_1e^{-s\tau})(sI - A_0 - A_1e^{-s\tau})^{-1}B + D.$$

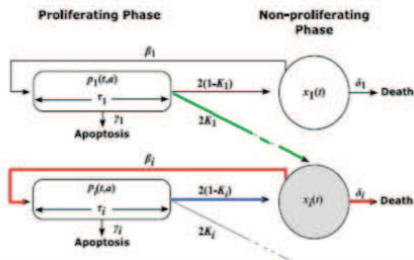
$$\mathcal{G}_n : \begin{cases} \dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t - \tau) + F\dot{x}(t - \tau) + Bu(t) \\ y(t) &= C_0x(t) + C_1x(t - \tau) + Du(t) \end{cases}$$

$$G_n(s) = (C_0 + C_1e^{-s\tau})(sI - A_0 - A_1e^{-s\tau} - Fse^{-s\tau})^{-1}B + D.$$

Plusieurs retards commensurables

$$\sum_{i=1}^n A_i \dot{y}(t - i\tau) + \sum_{i=1}^n B_i y(t - i\tau) + C \dot{y}(t) + D y(t) = \sum_{i=1}^n F u(t)$$

Des EDP aux retards (exemple de l'hématopoïèse)



Modèle à compartiments (équation de transport)

$$\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial a} = -(\delta + \beta)r, \quad t > 0, \quad a > 0.$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial a} = -(\gamma + g(a))p, \quad t > 0, \quad 0 < a < \tau.$$

Equation différentielle à retard distribué

$$\dot{x}(t) = -(\delta + \beta)x(t) + 2(1 - K) \int_0^\tau e^{-\gamma a} f(a) \beta x(t - a) da$$

Les pôles des systèmes à retards

$$G(s) = \frac{t(s) + \sum_{k=1}^{N'} t_k(s)e^{-ks\tau}}{p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s)e^{-ks\tau}} = \frac{n(s)}{d(s)}$$

où t , p , q_k , t_k sont des polynômes

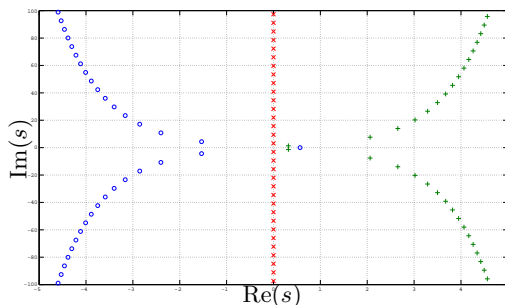


FIGURE: Chaînes de pôles retardées, neutres ou avancées

Les systèmes à retards

$$G(s) = \frac{t(s) + \sum_{i=1}^{N'} t_i(s) e^{-is\tau}}{p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s) e^{-ks\tau}} = \frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \deg p \geq \deg t \\ \geq \deg t_i \end{array} \quad i \in \mathbb{N}_{N'}$$

Retardé : $\deg p > \deg q_k \quad k \in \mathbb{N}_N$

Neutre : $\exists k \in \mathbb{N}_N \quad \deg p = \deg q_k$

$$\dot{x} = x(t - \tau) + u(t - \tau)$$

$$\dot{x} + \dot{x}(t - \tau) = u(t - \tau)$$

Les systèmes à retards

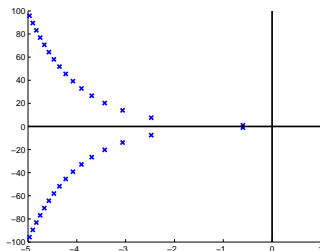
$$G(s) = \frac{t(s) + \sum_{i=1}^{N'} t_i(s) e^{-is\tau}}{p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s) e^{-ks\tau}} = \frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \deg p \geq \deg t \\ \geq \deg t_i \end{array} \quad i \in \mathbb{N}_{N'}$$

Retardé : $\deg p > \deg q_k \quad k \in \mathbb{N}_N$

Neutre : $\exists k \in \mathbb{N}_N \quad \deg p = \deg q_k$

$$\dot{x} = x(t - \tau) + u(t - \tau)$$

$$\dot{x} + \dot{x}(t - \tau) = u(t - \tau)$$



Les systèmes à retards

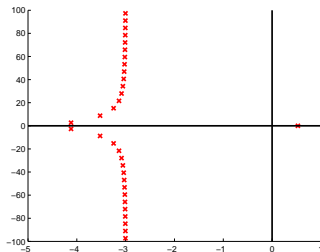
$$G(s) = \frac{t(s) + \sum_{i=1}^{N'} t_i(s) e^{-is\tau}}{p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s) e^{-ks\tau}} = \frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \deg p \geq \deg t \\ \geq \deg t_i \end{array} \quad i \in \mathbb{N}_{N'}$$

Retardé : $\deg p > \deg q_k \quad k \in \mathbb{N}_N$

Neutre : $\exists k \in \mathbb{N}_N \quad \deg p = \deg q_k$

$$\dot{x} = x(t - \tau) + u(t - \tau)$$

$$\dot{x} + \dot{x}(t - \tau) = u(t - \tau)$$



Les systèmes à retards

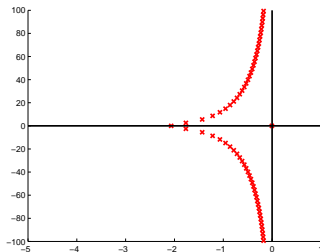
$$G(s) = \frac{t(s) + \sum_{i=1}^{N'} t_i(s) e^{-is\tau}}{p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s) e^{-ks\tau}} = \frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \deg p \geq \deg t \\ \geq \deg t_i \end{array} \quad i \in \mathbb{N}_{N'}$$

Retardé : $\deg p > \deg q_k \quad k \in \mathbb{N}_N$

Neutre : $\exists k \in \mathbb{N}_N \quad \deg p = \deg q_k$

$$\dot{x} = x(t - \tau) + u(t - \tau)$$

$$\dot{x} + \dot{x}(t - \tau) = u(t - \tau)$$



Les systèmes à retards

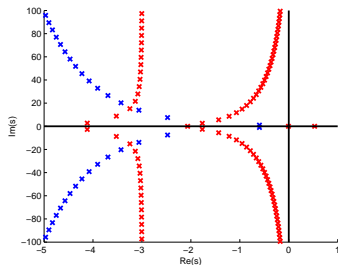
$$G(s) = \frac{t(s) + \sum_{i=1}^{N'} t_i(s) e^{-is\tau}}{p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s) e^{-ks\tau}} = \frac{n(s)}{d(s)} \quad \text{où} \quad \begin{array}{l} \deg p \geq \deg t \\ \geq \deg t_i \end{array} \quad i \in \mathbb{N}_{N'}$$

Retardé : $\deg p > \deg q_k \quad k \in \mathbb{N}_N$

Neutre : $\exists k \in \mathbb{N}_N \quad \deg p = \deg q_k$

$$\dot{x} = x(t - \tau) + u(t - \tau)$$

$$\dot{x} + \dot{x}(t - \tau) = u(t - \tau)$$



Caractérisation de la stabilité

- La stabilité de G est liée à la position de ses pôles.

Caractérisation de la stabilité

- La stabilité de G est liée à la position de ses pôles.
- Les pôles de petit module peuvent être trouvés par des méthodes numériques, pour ceux de grand module le comportement asymptotique est crucial

Caractérisation de la stabilité

- La stabilité de G est liée à la position de ses pôles.
- Les pôles de petit module peuvent être trouvés par des méthodes numériques, pour ceux de grand module le comportement asymptotique est crucial
- Les chaînes de pôles de G ont les différentes formes ci-dessous :

Caractérisation de la stabilité

- La stabilité de G est liée à la position de ses pôles.
- Les pôles de petit module peuvent être trouvés par des méthodes numériques, pour ceux de grand module le comportement asymptotique est crucial
- Les chaînes de pôles de G ont les différentes formes ci-dessous :
 - 1 Si $\deg p = \deg q_N$, alors il n'y a que des chaînes de type neutre ;

Caractérisation de la stabilité

- La stabilité de G est liée à la position de ses pôles.
- Les pôles de petit module peuvent être trouvés par des méthodes numériques, pour ceux de grand module le comportement asymptotique est crucial
- Les chaînes de pôles de G ont les différentes formes ci-dessous :
 - 1 Si $\deg p = \deg q_N$, alors il n'y a que des chaînes de type neutre ;
 - 2 Si $\deg p = \deg q_k > \deg q_N$, pour un $k \in \mathbb{N}_N$, alors il y a des chaînes de type retardé et de type neutre

Stabilité et Stabilisation des systèmes à retard

Théorème

Pour les systèmes à retards :

- de type retardé
- de type neutre lorsqu'ils n'ont qu'un nombre fini de pôles dans $\{\operatorname{Re} s > -a, a > 0\}$

Résultats

- Stabilité $H_\infty \iff$ pas de pôles dans $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$
- La paramétrisation de Youla-Kučera s'étend

Stabilité et Stabilisation des systèmes à retard

Exemple

$$G(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s}$$

$$N(s) = \frac{e^{-s\tau}}{s+1}, \quad D(s) = \frac{s}{s+1}, \quad X(s) = -1, \quad Y(s) = 1 + \boxed{\frac{1-e^{-s\tau}}{s}}$$

Implémentation

$\frac{1-e^{-s\tau}}{s}$ est la fonction de transfert de $y(t) = \int_0^\tau u(t-\theta)dt$

L'implémentation de ce retard distribué n'est pas triviale (problèmes continu/discret).

Les pôles de petit module

La position des pôles varie **continûment** par rapport au retard

Le cas d'un retard : $A(s) + C(s)e^{-s\tau}$

Si $A(s) + C(s)e^{-s\tau} = 0$ en $s = i\omega$ alors

1. $W(\omega) := |A(i\omega)|^2 - |C(i\omega)|^2 = 0$
2. $\text{sign Re } \frac{ds}{d\tau} = \text{sign Re } \frac{1}{s} \left[\frac{C'(s)}{C(s)} - \frac{A'(s)}{A(s)} \right]$ et la direction dans laquelle les zéros traversent l'axe (de gauche à droite ou de droite à gauche) en un point $i\omega$ dépend seulement de ω et pas de la valeur du retard pour laquelle le passage a lieu.

Méthode de Walton et Marshall

1. Tester la stabilité lorsque $\tau = 0$.
2. Tester la stabilité pour des τ infinitésimaux. Les nouveaux pôles apparaissent dans le demi-plan gauche si et seulement si $W(\omega) > 0$ pour ω grand.
3. Localiser les traversées de l'axe et les classifier comme stabilisantes ou déstabilisantes. Calculer les valeurs correspondantes de τ et construire les fenêtres de stabilité.

Nécessité d'avoir une méthode numérique

Effets des pôles neutres sur la stabilité H_∞

- Axe asymptote à droite de l'axe imaginaire
→ H_∞ -instable

Effets des pôles neutres sur la stabilité H_∞

- Axe asymptote à **droite** de l'axe imaginaire
→ H_∞ -instable
- Axe asymptote à **gauche** de l'axe imaginaire
→ La stabilité H_∞ dépend de la position des **pôles de petit module**

Effets des pôles neutres sur la stabilité H_∞

- Axe asymptote à **droite** de l'axe imaginaire
→ H_∞ -instable
- Axe asymptote à **gauche** de l'axe imaginaire
→ La stabilité H_∞ dépend de la position des **pôles de petit module**
- Axe asymptote **est** l'axe imaginaire
→ La stabilité H_∞ dépend de la
 - position des **pôles de petit module**
 - position des chaînes de pôles par rapport à l'axe imaginaire
 - magnitude de la distance des **pôles de grand module** à l'axe imaginaire

Position des pôles de grand module

$$d(s) = p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s) e^{-ks\tau}$$

On suppose que pour tout k

$$\frac{q_k(s)}{p(s)} = \alpha_k + \frac{\beta_k}{s} + \frac{\gamma_k}{s^2} + \mathcal{O}(s^{-3}) \quad \text{as } |s| \rightarrow \infty, \quad (1)$$

Position des pôles de grand module

Le coefficient du terme de plus haut degré de $p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s)e^{-ksh}$, est un multiple du polynôme en z suivant :

$$\tilde{c}(z) = 1 + \sum_{i=1}^N \alpha_i z^i.$$

Axe asymptote

Il existe des chaînes de pôles qui approchent asymptotiquement les axes verticaux suivants

$$\operatorname{Re}(s) = -\frac{\ln(|r|)}{h}$$

pour chaque racine $z = r$ du polynôme $\tilde{c}(z)$.

r de multiplicité $m = 1$: chaînes de pôles [Bonnet et al., 2011]

r de multiplicité $m > 1$: chaînes de pôles [Nguyen et al., 2012]

Classe de systèmes considérée

Hypothèse (H) : Afin d'éviter une infinité de racines communes entre numérateur et dénominateur, nous supposons que le dénominateur de G vérifie :

- a) $\deg t(s) > \deg t_i(s)$; ou
- b) $\deg t_i(s) = \deg t(s)$ pour au moins un i et le polynôme \tilde{c}_n relatif au quasi-polynôme $n(s)$ n'a pas de racine de module inférieure ou égale à un et aucune racine commune de module strictement supérieur à un avec \tilde{c}_d .

Les racines du polynôme \tilde{c}_d sont de multiplicité un

Comportement asymptotique - chaîne de pôles unique

Théorème

Pour chaque racine simple r de $\tilde{c}_d(z) = 0$, les pôles de $G(s)$ ont le comportement asymptotique suivant

$$s_n h = \lambda_n + \mu_n + \mathcal{O}(n^{-2})$$

avec

$$\lambda_n = -\ln(r) + 2jn\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

et

$$\mu_n = -j \frac{h}{2\pi n} \frac{\sum_{k=1}^N \beta_k r^k}{N} = -j \frac{h K_r}{2\pi n} \frac{\sum_{k=1}^N k \alpha_k r^k}{N}$$

Comportement asymptotique - suite

$$\mu_n = -j \frac{hK_r}{2\pi n}$$

Pour connaître la position des pôles asymptotiques par rapport à l'axe imaginaire, nous devons étudier $\text{Im}(K_r)$.

Remarque

- Si $\text{Im}(K_r) \neq 0$, nous avons des pôles des deux côtés de l'asymptote. En effet, r^* est aussi racine de \tilde{c}_d et $\text{Im}(K_{r^*}) = -\text{Im}(K_r)$.
- Si $\text{Im} r = 0$ (par exemple si $\beta_k = 0$ pour tous les $k \in \mathbb{N}_N$) alors $\text{Im}(K_r) = 0$ et nous devons regarder le développement à un ordre supérieur.

Comportement asymptotique - suite

Théorème

Pour chaque racine r de $\tilde{c}_d(z) = 0$, les pôles de $G(s)$ ont le comportement asymptotique suivant

$$s_n h = \lambda_n + \mu_n + \nu_n + \mathcal{O}(n^{-3})$$

avec λ_n et μ_n comme plus haut et

$$\nu_n = \frac{h^2 \sum_{k=1}^N (-k^2 \alpha_k K_r^2 / 2 + k \beta_k K_r - \gamma_k - \beta_k \ln(r)/h) r^k}{4\pi^2 n^2 \sum_{k=1}^N k \alpha_k r^k}$$

Robustesse

- 1) une petite variation du retard change la position des axes mais ne change pas le côté (droite ou gauche de l'axe imaginaire) où ils se trouvent.
- 2) si l'axe imaginaire est un axe asymptote, il le reste si le retard varie et la position (droite ou gauche) des chaînes par rapport à l'axe demeure la même.
- 3) on a de la robustesse vis-à-vis des coefficients des polyômes (borne de robustesse difficile à calculer si tous les coefficients varient en même temps).

Théorème

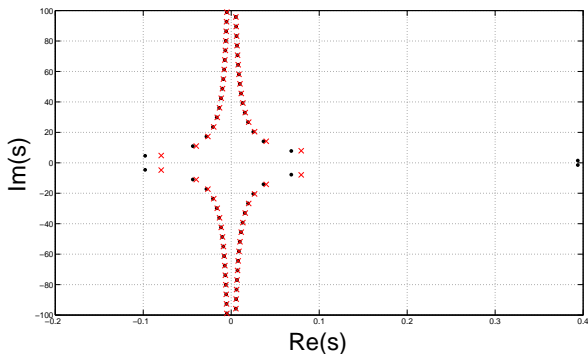
Si le système G est tel que :

- 1) Le polynôme \tilde{c}_d relatif au dénominateur de $G(s)$ possède au moins une racine de module inférieure ou égale à un, mais aucune racine de module un de multiplicité strictement supérieure à un ;
- 2) $\deg p = \deg t + 1$.

Alors G n'est pas stabilisable par un contrôleur rationnel.

Exemple 1 ($m = 1$)

$$G_1(s) = \frac{1}{s + e^{-s} + (s - 1)e^{-2s}}$$



$$r = \mp j, \quad \lambda_n = j\left(2n \pm \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{et} \quad \mu_n = \frac{j \pm 1}{4\pi n}$$

Exemple 2 ($m = 1$)

$$G_2(s) = \frac{1}{s^2 + s + 4e^{-s} + (s^2 + 1.1s + 7)e^{-2s}}$$

$r = \pm j$, $\text{Re}(\mu_n) = 0$ pour toutes les racines

$$\nu_n = \frac{-6.895 + j(\pm 4 \mp \pi/20)}{8\pi^2 n^2}$$

c'est-à-dire $\text{Re}(\nu_n) < 0$ pour toutes les racines de \tilde{c}_d

Les deux chaînes sont localisées dans le demi-plan gauche. Mais il y a deux pôles de petit module instables.

Exemple 2 - suite

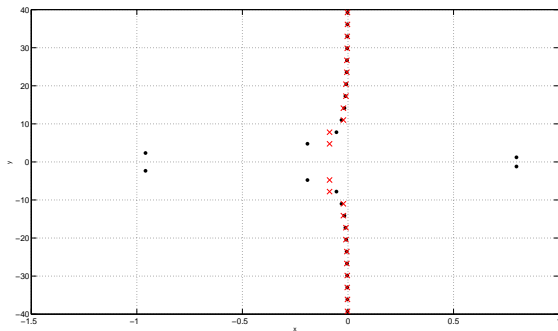


FIGURE: Chaînes de pôles neutres de $G_2(s)$

Exemple 3 ($m = 1$)

$$G_4(s) = \frac{s}{s^2 + 2 + (s^2 + s + 1)e^{-hs}},$$

$$G_5(s) = \frac{s + 1}{s^2 + s - 1 + (-s^2 + 3s + 2)e^{-hs}}.$$

- $G_4(s)$ et $G_5(s)$ ont une chaîne de pôles asymptotique à l'axe imaginaire
- Tous les pôles de $G_4(s)$ sont dans le demi-plan gauche pour $h \in [0, 4.7124]$.
- Tous les pôles de $G_5(s)$ sont dans le demi-plan gauche pour h .

Notice : Le degré relatif de $G_4(s)$ et $G_5(s)$ est un, mais celui de $G_4(s) \times G_5(s)$ est deux.

Exemple 3 - suite

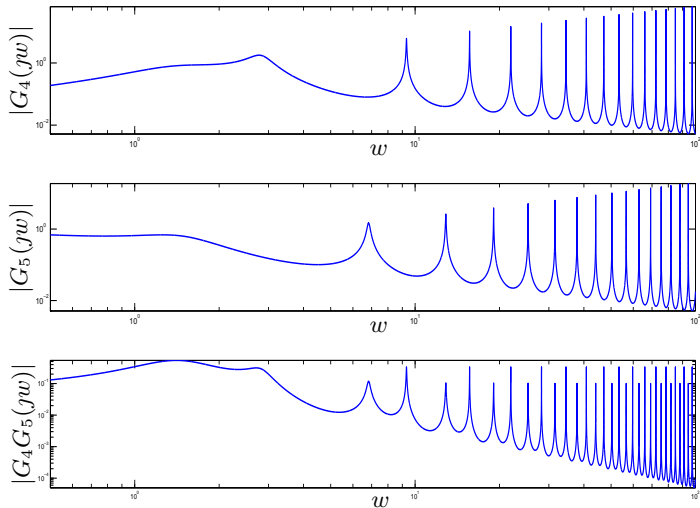


FIGURE: Frequency response for $G_4(s)$, $G_5(s)$ and $G_4(s) * G_5(s)$.

Les racines du polynôme \tilde{c}_d sont de multiplicité supérieure à un

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Pour une racine r de multiplicité $m > 1$ du polynôme \tilde{c}_d

$$\textcircled{1} \sum_{k=1}^N \beta_k r^k \neq 0$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=1}^N \beta_k r^k = 0 \text{ et } m = 2$$

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Cas 1 : une racine r de multiplicité $m > 1$ de \tilde{c}_d vérifiant $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k \neq 0$

Théorème

Pour chaque r de multiplicité m de $\tilde{c}_d(z) = 0$, la position asymptotique des pôles de $G(s)$ est donnée par

$$s_n h = \lambda_n + \mu_n + o(n^{-1/m}),$$

où $\lambda_n = -\ln(r) + 2jn\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\mu_n = \mu n^{-1/m}$ avec μ vérifiant

$$\mu^m = (-1)^m j \frac{m! h \sum_{k=1}^N \beta_k r^k}{2\pi \sum_{k=1}^N k^m \alpha_k r^k}.$$

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Cas 1 : une racine r de multiplicité $m > 1$ de \tilde{c}_d vérifiant $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k \neq 0$

Théorème

Pour chaque r de multiplicité m de $\tilde{c}_d(z) = 0$, la position asymptotique des pôles de $G(s)$ est donnée par

$$s_n h = \lambda_n + \mu_n + o(n^{-1/m}),$$

où $\lambda_n = -\ln(r) + 2jn\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\mu_n = \mu n^{-1/m}$ avec μ vérifiant

$$\mu^m = (-1)^m j \frac{m! h \sum_{k=1}^N \beta_k r^k}{2\pi \sum_{k=1}^N k^m \alpha_k r^k}.$$

→ Il existe des chaînes des **deux** côtés de l'axe asymptotique correspondant à la racine r .

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Cas 2 : une racine r de multiplicité $m = 2$ de \tilde{c}_d vérifiant $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k = 0$

Théorème

Pour chaque racine r de multiplicité m de $\tilde{c}_d(z) = 0$, la position asymptotique des pôles de $G(s)$ est donnée par

$$s_n h = \lambda_n + \mu_n + o(n^{-1}),$$

où $\lambda_n = -\ln(r) + 2jn\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ et $\mu_n = \mu n^{-1}$ with μ satisfying

$$\mu^2 \sum_{k=1}^N k^2 \alpha_k r^k + \frac{j h \mu}{\pi} \sum_{k=1}^N k \beta_k r^k - \frac{h^2}{2\pi^2} \sum_{k=1}^N \gamma_k r^k = 0,$$

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Cas 2 : une racine r de multiplicité $m = 2$ de \tilde{c}_d vérifiant $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k = 0$

Si un μ vérifie $\operatorname{Re}(\mu) \neq 0$, alors il y a au moins une chaîne de pôles neutres à **droite** de l'axe imaginaire

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Cas 2 : une racine r de multiplicité $m = 2$ de \tilde{c}_d vérifiant $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k = 0$

Si un μ vérifie $\text{Re}(\mu) \neq 0$, alors il y a au moins une chaîne de pôles neutres à **droite** de l'axe imaginaire

Quand l'asymptote est l'axe imaginaire :

- si un μ vérifie $\text{Re}(\mu) \neq 0 \rightarrow$ le système est **H_∞ -instable**
- si tous les μ vérifient $\text{Re}(\mu) = 0 \rightarrow$ on ne peut pas conclure sur la stabilité.

Localisation des pôles de $G(s)$ quand $m > 1$

Cas 2 : une racine r de multiplicité $m = 2$ de \tilde{c}_d vérifiant $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k = 0$

Théorème

Pour chaque racine r de multiplicité m de $\tilde{c}_d(z) = 0$, la position asymptotique des pôles de $G(s)$ est donnée par

$$s_n h = \lambda_n + \mu_n + \nu_n + o(n^{-2}),$$

où λ_n, μ_n sont donnés ci-dessus et $\nu_n = \nu n^{-2}$ avec ν vérifiant

$$\nu = \left(4\mu^3 \pi^3 \sum_{k=1}^N k^3 \alpha_k r^k + 6j\mu^2 \pi^2 h \sum_{k=1}^N k^2 \beta_k r^k - 6\mu\pi h^2 \sum_{k=1}^N k \gamma_k r^k - 3jh^3 \sum_{k=1}^N \delta_k r^k - 6\mu\pi h \ln(r) \sum_{k=1}^N k \beta_k r^k - 6jh^2 \ln(r) \sum_{k=1}^N \gamma_k r^k \right) / \left[12\pi^2 \left(2\mu\pi \sum_{k=1}^N k^2 \alpha_k r^k + jh \sum_{k=1}^N k \beta_k r^k \right) \right].$$

Théorème

Supposons que

- Le système $G(s)$ n'a pas de pôles de petit module instables.
- $\tilde{c}_d(z)$ a des racines de module un de multiplicité $m \leq 2$, et a au moins une racine de multiplicité 2.
- Chaque racine de multiplicité 2 vérifie $\sum_{k=1}^N \beta_k r^k = 0$ and $\text{Re}(\nu_2) < 0$.

Alors G est H_∞ -stable si et seulement si $\text{deg } p \geq \text{deg } t + 3$.

Example 4 ($m = 3$)

$$G_6(s) = 1/(s - 10e^{-s} + (3s - 3)e^{-2s} + 7e^{-3s} + (3s + 1)e^{-4s} - 4e^{-5s} + (s - 8)e^{-6s})$$

$r = \pm j$ de multiplicité $m = 3$, et $\sum_{k=1}^3 \beta_k r^k \neq 0$ pour les deux racines

\implies Il y a des chaînes des deux côtés de l'axe imaginaire.

$\implies G_6(s)$ est H_∞ -instable

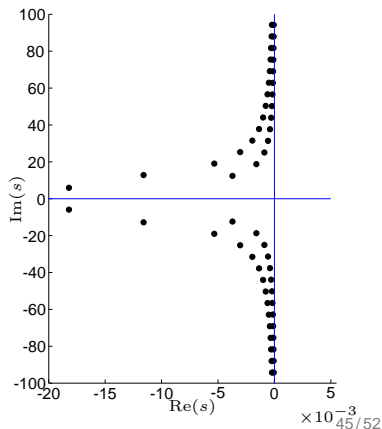
Example 5 ($m = 2$)

$$G_7(s) = \frac{1}{s^3 + (-2s^3 + s^2 - 10s + 5)e^{-s} + (s^3 - s^2 + 3s + 1)e^{-2s}}$$

$r = 1$ of multiplicity $m = 2$

$$s_{n1} = j2\pi n - \frac{0.3490j}{n} - \frac{0.0140}{n^2} + o(n^{-2})$$

$$s_{n2} = j2\pi n + \frac{0.5081j}{n} - \frac{0.0493}{n^2} + o(n^{-2})$$



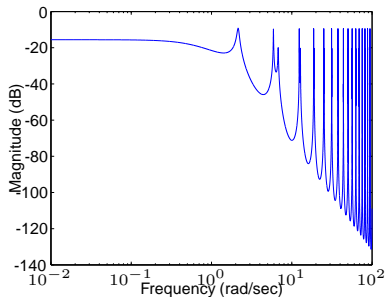
Example 5 ($m = 2$)

$$G_7(s) = \frac{1}{s^3 + (-2s^3 + s^2 - 10s + 5)e^{-s} + (s^3 - s^2 + 3s + 1)e^{-2s}}$$

$r = 1$ of multiplicity $m = 2$

$$s_{n1} = j2\pi n - \frac{0.3490j}{n} - \frac{0.0140}{n^2} + o(n^{-2})$$

$$s_{n2} = j2\pi n + \frac{0.5081j}{n} - \frac{0.0493}{n^2} + o(n^{-2})$$



Conclusion

- ① Ces résultats peuvent aider à prouver que le système n'est pas stabilisable par : des contrôleurs de dimension finie, des contrôleurs à retards commensurables, des contrôleurs fractionnaires à retards commensurables . . .
- ② Les systèmes avancés ont été très peu étudiés. Des contrôleurs discrets paraissent les stabiliser.
Plus généralement, prendre en compte la discrétisation : influence du pas d'échantillonnage . . .
- ③ Le cas des retards non commensurables ($\tau_1 = 1$ et $\tau_2 = \pi$).
L'analyse est différente. Qu'est-ce que ça signifie pour la machine ?

Boîte à outils YALTA (m=1)

<http://gforge.inria.fr/projects/yalta-toolbox/>

YALTA - Démo

Fonction de transfert $G(s) = N(s)/D(s)$ avec

$$D(s) = p(s) + \sum_{k=1}^N q_k(s)e^{-ks\tau}$$

Exemple

$$p(s) = s, \quad q_1(s) = 0.5s + 1, \quad \tau_{max} = 8$$

Code Matlab

```
p = [1 0]
q = [0.5 1]
delayVector = 1
tauMax = 8
alpha = 1
DelaySystem = delayFrequencyAnalysisMin([p;q], ...
    delayVector, tauMax, alpha, 1)
```


YALTA - Démo

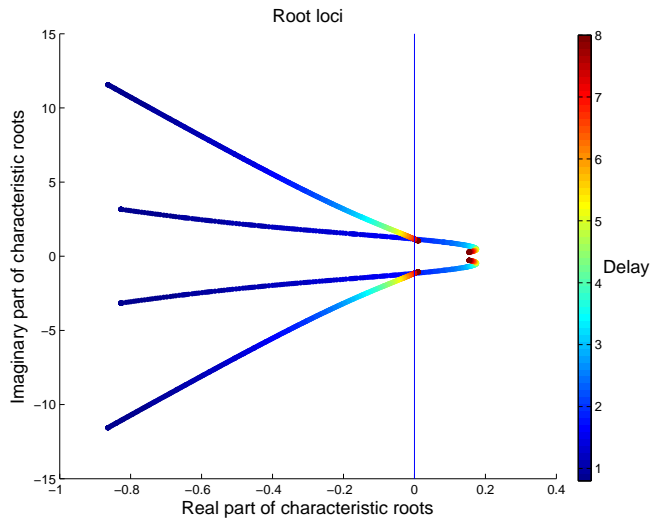
```
DelaySystem =  
  AsympStability: 'There are 4 unstable poles ...  
                  in right half plane'  
    Type: 'Neutral'  
  RootsNoDelay: -0.6667  
    RootsChain: -0.0866  
  CrossingTable: [1.8138 5.4414 1.1547 1]  
  ImaginaryRoots: [4x3 double]  
  StabilityWindows: [2x3 double]  
  NbUnstablePoles: [2x4 double]  
  UnstablePoles: [1x4 double]  
    Error: [1.0000e-11 1.0000e-11 ...  
           1.0000e-10 1.0000e-11]  
  RootLoci: {8x1 cell}
```

YALTA - Démo

```
DelaySystem.ImaginaryRoots =  
  1.8138    1.1547    1.0000  
  1.8138   -1.1547    1.0000  
  7.2552    1.1547    1.0000  
  7.2552   -1.1547    1.0000
```

```
DelaySystem.UnstablePoles =  
  0.1542 + 0.2760i  
  0.1542 - 0.2760i  
  0.0103 + 1.0428i  
  0.0103 - 1.0428i
```

YALTA - Démo



YALTA - Démo

